

# Outils (plus ou moins) nouveaux essentiels

- 1 Notations  $o$  et  $\sim$  (révisions).
- 2 Nouvelle notation  $O$ .
- 3 Suites numériques (révisions).
- 4 Séries numériques (révisions).
- 5 Suites de fonctions.
- 6 Séries de fonctions.
- 7 Séries de Fourier : formules coefficients.
- 8 Séries de Fourier :  $Sf(x)$  et  $f(x)$ .
- 9 Séries de Fourier : Parseval-Bessel.

# Notations $o$ et $\sim$

La notation  $f(x) = o(g(x))$  **au voisinage de  $a$**  signifie que  $f$  est égal au produit de  $g$  et de quelque chose qui tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $a$ .  
En particulier, quand  $g$  ne s'annule pas près de  $a$ , cela revient à dire que  $f/g$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $a$ .

La notation  $f(x) \sim g(x)$  **au voisinage de  $a$**  signifie que  $f$  est égal au produit de  $g$  et de quelque chose qui tend vers 1 quand  $x$  tend vers  $a$ .  
En particulier, quand  $g$  ne s'annule pas près de  $a$ , cela revient à dire que  $f/g$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers  $a$ .

Exemples au voisinage de 0 (ou  $0^+$  si besoin) :  
 $x^3 = o(x^2)$ ;  $\ln(x) = o(1/x)$ ;  $x^4 = o(\sin(x) - x)$ .

Exemples au voisinage de  $+\infty$  :  
 $\ln(\ln(x)) = o(\ln(x))$ ;  $e^x = o(xe^x)$ ;  $\sin(x) = o(x^2)$ .

# Nouvelle notation $O$

Ce n'est pas beaucoup plus dur que les autres...moralement cela veut dire qu'au lieu de tendre vers 0 ou 1,  $f/g$  a juste besoin de rester borné.

La notation  $f(x) = O(g(x))$  **au voisinage de  $a$**  signifie que  $f$  est égal au produit de  $g$  et de quelque chose qui reste borné quand  $x$  tend vers  $a$ .

En particulier, quand  $g$  ne s'annule pas près de  $a$ , cela revient à dire que  $f/g$  reste borné quand  $x$  tend vers  $a$ . **Mais personne ne dit que  $f/g$  a une limite bornée !**

Si  $f \sim g$  ou  $f = o(g)$ , alors  $f = O(g)$ .

Exemples :  $x - \sin(x) =_0 O(x^3)$ ;  $1 - \cos(x) =_0 O(x^2)$ ;  $10x^2 =_0 O(x)$

$x \sin(x) = O(x)$  (**au voisinage de n'importe quel point !**)

$\ln(x) =_1 O(x - 1)$ ;  $2x^2 + 1 =_\infty O(x^2)$ .

# A quoi sert la nouvelle notation grand $O$ ?

L'intérêt est que les théorèmes de comparaison pour la convergence de séries se réécrivent plus facilement. Plus concrètement, si  $u_n, v_n \geq 0 \forall n$  et si  $u_n = O(v_n)$  :

$$\sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

et réciproquement :

$$\sum u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge.}$$

On peut procéder de même pour réécrire les résultats de comparaison vus pour les intégrales.

# Suites numériques (révisions)

Pour les **suites numériques**, on regarde  $u_n$  pour  $n \geq n_0$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et on ne somme personne.

Exemples et méthodes à bien connaître :

- Suite géométrique :  $z^n$  converge si et seulement si  $|z| < 1$  (vers 0) ou  $z = 1$  (vers 1).
- Comparaison : si  $u_n$  tend vers 0 et  $v_n = O(u_n)$ ,  $v_n$  tend aussi vers 0.
- Croissance comparée : plein d'exemples :

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}; \quad \frac{e^{n^2}}{n^5}; \quad \frac{e^n + n^3}{e^{n+1} - n}; \quad \frac{2n - \sqrt{n}}{n + \ln(n)}; \quad \frac{n^2}{n^2 \ln(n)}.$$

# Séries numériques (révisions)

Pour les **séries numériques**, on prend  $a_n$  pour  $n \geq n_0$  et on regarde ce que fait la somme  $S_n = a_{n_0} + \dots + a_n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Exemples et méthodes à bien connaître :

- Série géométrique :  $\sum a^n$  converge si et seulement si  $|a| < 1$ .
- Série de Riemann :  $\sum 1/n^a$  converge si et seulement si  $a > 1$ .
- Comparaison : si  $\sum u_n$  converge absolument et  $v_n = O(u_n)$ , alors  $\sum v_n$  converge absolument.
- Les critères de d'Alembert et Cauchy (qui peuvent être réécrits comme une comparaison asymptotique entre  $a_n$  et  $l^n$ ).

Exemples :

$$\sum \sin(2^{-n}); \sum \frac{3^n}{(n!)^2}; \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

La **convergence simple** veut juste dire que pour **chaque**  $x$  fixé, la **suite numérique**  $a_n(x)$  converge vers une limite  $a(x)$ .

La **convergence uniforme** signifie que  $a(x) - a_n(x)$  tend vers 0 uniformément en  $x$ . En d'autres mots, on peut trouver une suite numérique  $M_n$  qui tend vers 0 telle que :

$$|a(x) - a_n(x)| \leq M_n, \quad \forall x, n.$$

C'est la condition pour les théorèmes de passage à la limite.  
Exemples avec  $I = ]0, +\infty[$  puis  $J = [1, +\infty[$  :

$$\frac{nx}{nx+1}; \quad \frac{x^n}{x^n+1}.$$

# Séries de fonctions

La, cela se complique. Il y a 3 notions de convergence, de la moins à la plus forte :

- La **convergence simple** signifie juste que pour **chaque**  $x$  fixé, la **série numérique**  $\sum u_n(x)$  converge.
- La **convergence uniforme** signifie que, en plus de la convergence simple, la **suite de fonctions** :

$$R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} u_k(x)$$

tend vers 0 **uniformément en  $x$**  (voir transparent précédent).

C'est la condition pour les théorèmes de passage à la limite.

- La plus forte est la **convergence normale**. Maintenant, on demande que la **série numérique** des normes :

$$\sum \|u_n\|_{\infty}$$

converge. On rappelle que  $\|u\|_{\infty} := \sup_x |u(x)|$ .

Exemples avec  $I = ]0, +\infty[$  puis  $J = [1, +\infty[$  :  $\frac{1}{(x+1)^n}$ ;  $\frac{1}{n^3 x}$ .



On suppose toujours que les fonctions étudiées sont  $T$ -périodiques et  $C^1$  par morceaux.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \left( n \frac{2\pi}{T} x \right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \left( n \frac{2\pi}{T} x \right) dx.$$

## Séries de Fourier : $Sf(x)$ et $f(x)$ .

On note la somme  $Sf$  :

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)).$$

Cette somme converge toujours **simplement** vers  $(f(x^-) + f(x^+))/2$ , donc si  $f$  est continue vers  $f(x)$ .

On a :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)^2 dx.$$

Avec le contenu du transparent d'avant, il s'agit de deux égalités qui permettent de calculer la valeur exacte de beaucoup de sommes.

On prend la fonction  $2\pi$ -périodique définie par  $f(x) = x$  sur  $] -\pi, \pi]$ .

- Tracer le graphe sur  $] -3\pi, 3\pi]$ .
- Calculer les  $a_n$  et  $b_n$ .
- Ecrire la somme  $Sf(x)$ . A quoi est-elle égale ?
- Calculer la somme  $\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ .
- Calculer la somme  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ .

# Outils (plus ou moins) nouveaux essentiels continus

- ① Intégrales et convergence absolue (révisions).
- ② Intégrales impropres.
- ③ Intégrales à paramètre.
- ④ Décomposition en éléments simples (révisions).
- ⑤ Transformée de Laplace.
- ⑥ Produit de convolution.
- ⑦ Transformée de Fourier.

Ici et dans la suite, toutes les fonctions sont supposées continues par morceaux. Lorsque nous intégrons une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$ , on a deux situations possibles :

- Si  $\int_I |f|$  est finie (l'intégrale converge absolument, alors  $\int_I f$  est bien définie.
- Si  $\int_I |f|$  est infinie, il faut voir dans quelles situations nous pouvons quand même donner un sens à  $\int_I f$ .

# Intégrales impropres.

Regardons une fonction  $f$  définie sur un intervalle ouvert  $I$ . Si  $f$  et  $I$  sont bornés, tout va bien. Il y a deux types de soucis possibles :

- $f$  n'est pas bornée près de (au moins) une des bornes de l'intervalle.
- L'intervalle lui-même n'est pas borné.

Dans les 2 cas, il faut approcher les bornes de  $I$  et regarder la limite (s'il y a un souci à chaque borne, on coupe au milieu et on regarde chaque limite séparément).

Exemples :

$$\int_0^1 \ln(x + x^2) \, dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^{5/2}} \, dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} \, dx.$$

On regarde :

$$f(p) := \int_I F(p, x) \, dx.$$

Sous des hypothèses de domination sur  $F$  **uniformément en  $p$**  par une fonction absolument intégrable sur  $I$ , on obtient que  $f$  est (au moins) aussi régulière que  $F$ .



# Décomposition en éléments simples (révisions).

Formules longues à écrire, en particulier si décompositions réelles...mais dans tous les cas, si le dénominateur est de degré  $n$ , alors il y a un système avec  $n$  équations et  $n$  inconnues.

Exemples :

$$\frac{X}{(X^2 - 1)^2}; \quad \frac{X}{X^2 + 2X + 2}.$$

# Transformée de Laplace.

Il s'agit d'une l'intégrale à paramètre :

$$L[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx.$$

Les formulations sont un peu longues, mais en tout cas vous pouvez le calculer pour  $p > A$  si  $f(x) = O(e^{Ax})$  à l'infini.

Exemples pour trouver  $L[f](p)$  :

$$f(x) = e^x; \quad f(x) = \cos(x).$$

Exemples pour trouver  $f(x)$  en partant d'une fraction rationnelle :

$$L[f](p) = \frac{2}{p^2 + 1}; \quad L[f](p) = \frac{2}{p^2 - 1}.$$

Il s'agit encore une fois d'une intégrale à paramètre :

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x) dx.$$

Par rapport à la transformée de Laplace, il y a un  $i$  en plus et on a changé les bornes.

C'est un objet compliqué, mais en tout cas vous pouvez le calculer si  $f$  est absolument intégrable.

Exemples pour trouver  $\hat{f}(p)$  :

$$f(x) = e^{-|x|}; \quad f(x) = x1_{[-1,1]}(x).$$

Merci de votre attention !